

Estudio de la luminosidad del cielo durante un eclipse total de Sol en Idaho, EEUU

Samuel Capellas Coderque*, Guillem Rivas†

*Universitat Politècnica de Catalunya

†University of California, Los Angeles

ABSTRACT

El objetivo de esta investigación ha sido discutir qué factores influyen en la luminosidad del cielo durante la parcialidad de un eclipse total de Sol. Se han desarrollado dos modelos, uno matemático y uno informático, para extraer valores teóricos de luminosidad y contrastarlos con los datos experimentales, logrando una desviación media de los datos menor al 1%. Se ha concluido que la fracción superficial visible del disco solar y la disminución de la luminosidad al aumentar la distancia al centro del mismo son los principales determinantes de la luminosidad durante la parcialidad de un eclipse total de Sol.

I. INTRODUCCIÓN

Gracias a Shelios y a la financiación de CiMs-Cellex, el día 21 de agosto de 2017 pude observar un eclipse total de Sol desde Idaho. Una de las cosas que más me llamó la atención fue que la oscuridad del eclipse llegó repentinamente unos segundos antes de la totalidad. Esto se debe a que nuestra percepción visual tiene carácter logarítmico: cuando hay mucha luz, los ojos no son capaces de percibir sus pequeñas variaciones. Así pues la oscuridad no llegó durante los últimos segundos, sino que la disminución de luz fue progresiva y el ojo humano solo la percibió cuando la luz era escasa. Pero entonces, ¿qué forma describe la curva de disminución de luz y qué fenómenos la explican? Lo más intuitivo es pensar que la luz durante el eclipse parcial es proporcional a la superficie solar visible (por ejemplo, si vemos la mitad del disco solar debería alcanzarnos la mitad de radiación). Sin embargo, podrían existir otros fenómenos que influyan en la luminosidad durante el eclipse parcial. Así pues, el objetivo inicial de esta investigación es estudiar la relación entre la luminosidad del cielo y la superficie del disco solar visible en función del tiempo, y analizar la discrepancia entre ambas para discutir qué otros factores determinan la luminosidad durante el eclipse.

II. DATOS Y MÉTODOS (I)

II-A. Obtención de datos

Para estudiar la luminosidad del cielo durante el eclipse se utilizarán los datos recogidos por el equipo de investigación de Jaime Zamorano, de la Universidad Complutense de Madrid. Los datos de luminosidad fueron tomados mediante un fotómetro con filtro solar en Cascade, Idaho, durante el eclipse del 21 de agosto de 2017. En la siguiente tabla se muestra más información sobre eclipse.

Tabla I: Información sobre el eclipse

Lugar	Cascade, Idaho	Duración	2h 38min 48s
Inicio parcialidad	10:11:21 am	Inicio totalidad	11:26:50 am
Fin totalidad	11:28:46 am	Fin parcialidad	12:50:09 pm

II-B. Descripción de la metodología seguida

Los datos recogidos por la UCM miden la luminosidad del cielo mediante la magnitud aparente, una unidad logarítmica adaptada a la percepción del ojo humano. Así pues, la magnitud aparente en función del tiempo es un indicador de la luz que percibe el ojo humano durante un eclipse. A continuación se muestra el gráfico de la magnitud en función del tiempo; por comodidad y simetría, se analizarán solo los datos correspondientes a la primera mitad del eclipse hasta alcanzar la totalidad.

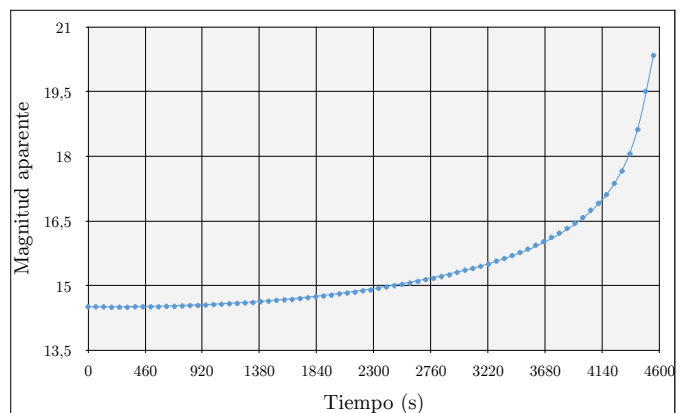


Figura 1: Magnitud aparente durante el eclipse parcial.

El gráfico 1 muestra el carácter logarítmico de la magnitud aparente, ya que se mantiene bastante estable durante el eclipse y baja drásticamente en los últimos minutos. Sin embargo, el objetivo inicial de la investigación es hallar una relación entre la luminosidad del cielo y la superficie solar visible, por lo que será necesario utilizar unidades lineales que se ajusten a la cantidad de luz y no a la percepción humana. El flujo luminoso, F , que se relaciona con la magnitud M mediante la ecuación (1), es una unidad lineal, por lo que será útil para medir la luminosidad del cielo durante el eclipse y compararla con la superficie del disco solar visible en función del tiempo.

$$M = k - 2,5 \log F \quad (1)$$

En (1), k es una constante que depende del fotómetro, que para los datos de la UCM toma el valor de $k = 20,43$. Así pues los datos tomados por la UCM podrán pasarse a flujo luminoso mediante la ecuación (1) para su posterior análisis. No obstante, la comparación entre unidades de luminosidad y superficie puede resultar problemática; en esta investigación se optará por la comparación adimensional en tanto por uno de ambas magnitudes, pues el objetivo es estudiar la disminución relativa de luminosidad, no la luz desde un punto de vista cuantitativo. Por lo tanto, a partir del flujo luminoso $F(t)$ y de su valor inicial (que será el máximo), se hallará la fracción de flujo luminoso $f(t)$:

$$f(t) = \frac{F(t)}{F_{max}} \quad (2)$$

Asimismo, es necesario obtener una expresión matemática de la fracción superficial solar visible en función del tiempo. Asumiendo que los tamaños aparentes de la Luna y el Sol son iguales y que la velocidad relativa de los discos es constante, puede obtenerse mediante trigonometría básica una expresión matemática de la fracción visible del disco solar, $s(t)$:

$$1 + \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2} - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{t}{T}\right) \quad (3)$$

La constante T equivale al tiempo entre el primer contacto y la totalidad, y tiene un valor de 4529 segundos. Para la deducción de la fórmula (3), véase el apéndice.

III. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS (I)

Tras la experimentación, los datos de magnitud aparente han sido procesados para obtener valores discretos de $f(t)$. Así pues, podemos compararlos con los valores continuos de $s(t)$, en el intervalo $0 \leq t \leq T$:

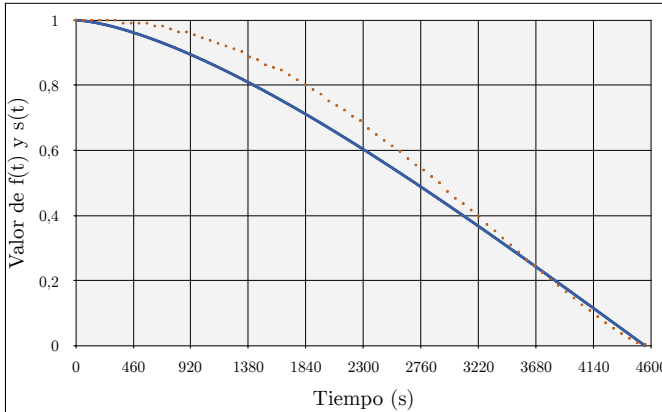


Figura 2: Comparación de la fracción de flujo luminoso (marrón) y la fracción del disco solar visible (azul) en función del tiempo.

El gráfico 2 no solo permite comprobar que la pérdida de luz durante el eclipse parcial no es tan drástica como parece en el gráfico 1, sino también que, tal y como se ha propuesto intuitivamente en un principio, existe una clara relación entre el flujo luminoso y la superficie del disco solar visible en

función del tiempo. Sin embargo, podemos identificar algunas diferencias entre las curvas que los describen:

- Al inicio del eclipse, $\frac{ds}{dt} < \frac{df}{dt}$, es decir, el flujo luminoso disminuye menos de lo esperado en relación a la superficie visible.
- Poco antes de la mitad del eclipse (cuando el centro del disco solar está a punto de ser tapado), la diferencia entre $f(t)$ y $s(t)$ empieza a disminuir: $\frac{df}{dt} < \frac{ds}{dt}$.
- Cuando el eclipse ha avanzado lo suficiente y queda por cubrir la sección más periférica y alejada del centro del disco solar, $f(t) < s(t)$.

Las tres observaciones sugieren una nueva hipótesis a contemplar en esta investigación: la luminosidad emitida por el Sol es máxima en el centro del disco solar y mínima en los puntos más alejados de él.

- Al inicio del eclipse la Luna solo oculta puntos periféricos del disco solar, por lo que si estos emiten menos luz es coherente que la luminosidad neta apenas se vea afectada cuando son tapados.
- Con el avance del eclipse, si los puntos tapados por la Luna son cada vez más luminosos es lógico que la luminosidad disminuya en mayor medida por unidad de tiempo, y por lo tanto, que la pendiente del gráfico de $f(t)$ disminuya hasta igualar y superar en valor absoluto a la pendiente de $s(t)$.
- Hacia el final del eclipse, a partir de $s = 0,25$, la fracción de flujo luminoso es menor que la de disco solar visible, lo que sugiere que los puntos lejanos al centro del disco solar emiten menos luz.

Así pues, los indicios de que la luminosidad de los puntos del disco solar varía con su distancia al centro son lo suficientemente convincentes como para ahondar en su estudio.

IV. DATOS Y MÉTODOS (II)

El objetivo de la siguiente sección es estudiar si existe una distribución de luminosidad desigual en los puntos del disco solar y, si la hay, desarrollar un modelo que la tenga en cuenta para obtener una curva de luminosidad teórica en función del tiempo a comparar con los datos empíricos.

Para estudiar la luminosidad del disco solar se analizará una fotografía del Sol, tomada mediante una cámara Canon EOS 7D con filtro solar y un chip CMOS de sensibilidad luminosa lineal. La luminosidad de los píxeles de la fotografía se medirá mediante su nivel digital N_d , que es un valor entero asignado a cada píxel directamente proporcional a la luminosidad de la escena L_s (cd/m^2) según la relación

$$N_d = K_c \left(\frac{tS}{f_s^2} \right) L_s \quad (4)$$

donde K_c es la constante de calibración de la cámara, t el tiempo de exposición, S la sensibilidad fotográfica ISO y f_s el número de apertura de la lente^[1]. Como la ecuación (4) es lineal, el sensor utilizado es útil para fotometría: la diferencia de luminosidad entre dos puntos del disco solar cualesquiera

se manifiesta en una variación proporcional del nivel digital N_d de ambos píxeles.

Así pues, una buena manera de comprobar si la luminosidad varía en función de la distancia al centro del disco solar es trazar una línea diametral en la fotografía del Sol y analizar nivel digital N_d para cada uno de los píxeles que la componen.

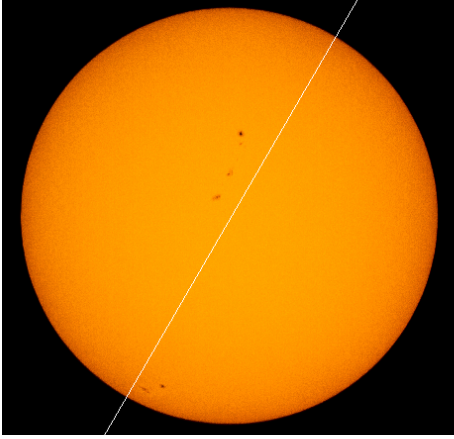


Figura 3: Fotografía del Sol a procesar. Por David Hernández.

El gráfico 3 muestra el análisis del nivel digital de los píxeles de la línea diametral mostrada en la Figura 1. El diámetro del Sol en la fotografía es de 1682 píxeles, por lo que la variable independiente en el gráfico 3, que es la coordenada de los píxeles sobre la línea, va desde 0 hasta 1682.

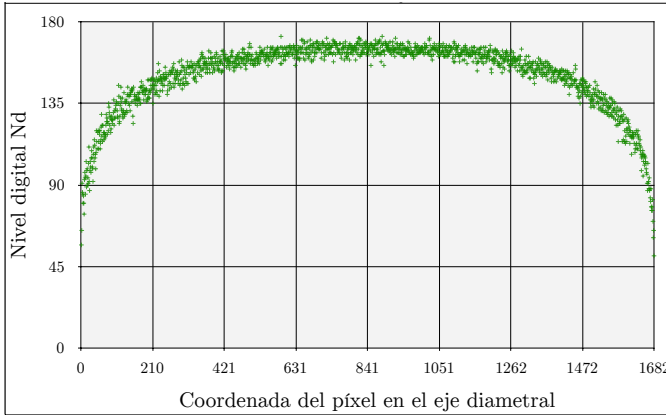


Figura 4: Luminosidad de los píxeles en función de su coordenada en el eje diametral.

El gráfico 3 muestra claramente como la luminosidad de los puntos del disco solar disminuye al aumentar su distancia al centro, aunque la disminución solo se hace perceptible en los puntos más periféricos. Una vez comprobada la existencia de este fenómeno, se analizará la fotografía del Sol para obtener una curva teórica de la luminosidad durante el eclipse.

En primer lugar, se han extraído los niveles digitales de cada píxel de la fotografía para obtener una matriz bidimensional A de orden $m \times n$ y elementos a_{ij} , que corresponden al nivel digital de cada píxel. A continuación, se ha construido su matriz inversa con respecto a la suma, B , de orden $m \times n$ y elementos $b_{ij} = -a_{ij}$. En cada intervalo de tiempo se irán

superponiendo las dos matrices, de modo que a aquellas celdas de A cuyo elemento sea distinto de cero y que sean tapadas por B se les sumará su inverso y resultarán en 0. Es decir, la matriz lunar B se desplazará hacia la derecha y el número digital total de la matriz solar A irá disminuyendo. Para cada intervalo de tiempo se computará P , la suma de los niveles digitales N_d de todos los píxeles de la matriz A :

$$P(t) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij}(t) \quad (5)$$

Esta simulación se programará en Matlab (véase el código del programa en el apéndice), y los datos recogidos podrán representarse en un gráfico del nivel digital total de la fotografía del Sol en función del tiempo. Sin embargo, para comparar la curva obtenida con los datos empíricos, los valores de P recogidos vía Matlab deberán pasarse a tanto por uno. Así pues, definimos $p(t)$ como la suma de los valores digitales de todos los píxeles de la imagen en tanto por uno, en función del tiempo:

$$p(t) = \frac{P(t)}{P_{max}} \quad (6)$$

La función $p(t)$ es un buen indicador de la luminosidad del cielo porque la ecuación (4) muestra que $N_d \propto L_s$.

V. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS (II)

La rapidez de la simulación en Matlab se ha adaptado a la duración real del eclipse para que las curvas de $p(t)$ y $f(t)$ puedan ser comparadas. Se ha obtenido el gráfico 4, que compara $p(t)$ con los datos empíricos y también con $s(t)$.

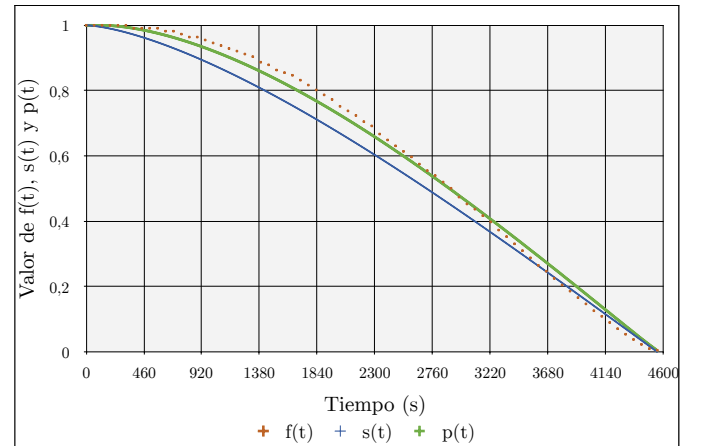


Figura 5: Comparación de los modelos $s(t)$ y $p(t)$ con los datos experimentales de la fracción de flujo luminoso durante el eclipse.

En el gráfico puede verse que la curva de la luminosidad teórica $p(t)$ tiene una relación clara con los valores de luminosidad experimental durante el eclipse. Puede comprobarse que la curva de $p(t)$ se aproxima más a los datos experimentales que la de $s(t)$: por ejemplo $p(t)$ tarda en disminuir al inicio del gráfico, ya que el nuevo modelo tiene en cuenta que la parte periférica del disco solar contribuye en menor medida a la luminosidad global.

Una manera objetiva de evaluar qué curva se ajusta mejor al gráfico experimental es mediante la desviación estándar σ , que calcula la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las desviaciones. Sin embargo la desviación estándar no es práctica para este estudio, pues al tratar con datos numéricos del orden de 10^{-2} los valores obtenidos serían excesivamente pequeños. Un método más eficaz en esta situación es la desviación media, D_m :

$$D_m(s) = \sum_{i=1}^n \frac{|f_i - s_i|}{n}, \quad D_m(p) = \sum_{i=1}^n \frac{|f_i - p_i|}{n} \quad (7)$$

Aplicando la fórmula (7) y teniendo en cuenta que hay 73 datos de flujo luminoso experimental ($n = 73$), se obtienen los valores $D_m(s) = 0,0453$ y $D_m(p) = 0,0074$. Es decir, $D_m(s) > 6 D_m(p)$. Esto confirma que el segundo modelo es mucho más eficaz que el primero, y por lo tanto que la distribución desigual de la luminosidad en función del radio, cuya existencia se ha comprobado mediante el gráfico 3, ayuda a explicar la curva de luminosidad durante la parcialidad de un eclipse total de Sol.

Aun así, la curva de $p(t)$ no encaja a la perfección con los datos experimentales. En la sección III se ha deducido que la luminosidad en el disco solar varía con la distancia al centro en parte porque en el gráfico 2 los últimos datos experimentales disminuyen por debajo de $s(t)$. Sin embargo, en el gráfico 4 puede verse que $p(t)$ tampoco encaja con la tendencia de los datos experimentales de los últimos minutos del eclipse parcial. Entonces, ¿qué puede causar esta disparidad?

Debe tenerse en cuenta que incluso el segundo modelo desarrollado es falible, ya que hace suposiciones como que la Luna y el Sol tienen exactamente el mismo tamaño aparente desde la Tierra, o que la velocidad relativa de ambos astros es constante y rectilínea. Como estas afirmaciones no son ciertas, podrían haber contribuido a una ligera desviación de la curva obtenida. Los datos experimentales de $f(t)$ también tienen una incertidumbre asociada que limita su precisión, que no se ha considerado hasta ahora porque la interpretación de los gráficos ha sido principalmente cualitativa. A continuación se estudiará dicho error para determinar si este puede ser causa de la disparidad descrita anteriormente.

La propagación del error absoluto de la magnitud aparente M para los valores de la fracción de flujo luminoso $f(t)$ viene dada por la siguiente expresión^[2].

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial M} \right| \cdot \Delta M \quad (8)$$

Durante la salida del sol la magnitud aparente debería ser decreciente, pero en ocasiones los datos tomados por el fotómetro de la UCM aumentan en un máximo en 0,03 unidades. Por lo tanto, fijando $\Delta M = 0,03$ y operando a partir de la ecuación (1), se obtiene la expresión general de Δf :

$$\Delta f = 1,743 \cdot 10^{5-0,4M} \quad (9)$$

La expresión de Δf decrece con el tiempo, y solo se hace menor que la desviación media $D_m(p)$ durante los últimos 2 minutos de parcialidad. Por lo tanto, en general, el error

asociado a las medidas de luminosidad es mayor que la desviación media de $p(t)$, lo que podría justificar la posible disparidad entre gráficos.

También debe considerarse que otros fenómenos podrían influir sobre la luminosidad durante el eclipse, causando la discrepancia entre $p(t)$ y $f(t)$ durante los últimos minutos. Por ejemplo, como en un eclipse la Luna funciona como obstáculo de la luz incidente sobre la Tierra, podría producirse un efecto de difracción, de modo que nos alcanzaría radiación solar adicional correspondiente a puntos del disco solar que ya han sido tapados^[3]. También debe considerarse una posible dispersión de luz solar por parte de las partículas atmosféricas, que condicionaría también la luminosidad total durante el eclipse. De todos modos, como la desviación media del segundo modelo con respecto a los datos empíricos es muy pequeña, puede afirmarse que si hay otros factores que influyen en la luminosidad del cielo durante el eclipse, lo hacen de forma casi insignificante.

VI. CONCLUSIONES

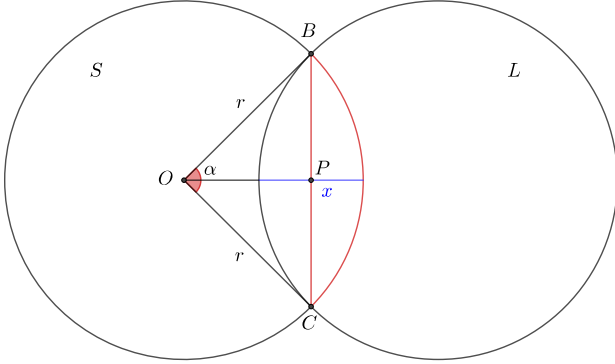
Para finalizar, puede afirmarse que se han cumplido los objetivos principales de esta investigación. En primer lugar, gracias al uso de unidades lineales para expresar la luminosidad y al desarrollo de la expresión matemática de $s(t)$, se ha podido comprobar que la fracción de superficie del disco solar visible es un buen indicador del flujo luminoso durante un eclipse solar. Sin embargo, las discrepancias observadas entre $s(t)$ y los datos experimentales han llevado a la hipótesis de que la luminosidad de los puntos del disco solar disminuye al aumentar su distancia al centro. Dicho efecto ha sido comprobado a partir técnicas de análisis fotográfico, ya que se sabe que el nivel digital asociado a cada píxel es directamente proporcional a la luminosidad en dicha parcela de la imagen. A continuación se ha desarrollado un modelo informático teniendo en cuenta este nuevo factor, a partir del cual se han obtenido valores de luminosidad teórica con una desviación mínima con respecto a los datos empíricos.

Por lo tanto, se concluye que la fracción del disco solar visible y la variación de luminosidad en función de la distancia al centro del mismo explican satisfactoriamente la evolución de la luminosidad del cielo durante un eclipse. La gran exactitud de la luminosidad teórica obtenida a partir del segundo modelo sugiere que, si hay otros fenómenos que condicionan la luminosidad del cielo durante este evento, lo hacen de forma mínima.

APÉNDICE

Deducción de la fórmula de $s(t)$

Para deducir $s(t)$, consideramos un círculo estático S (Sol) de radio r y un disco circular L del mismo radio (Luna) que lo tapa progresivamente a velocidad constante v desde la derecha. Sea t el tiempo transcurrido desde el primer contacto, y sea x el segmento intersección de los radios de ambos discos en la dirección de la recta que une sus centros, en función del tiempo. Sea α el ángulo variable que abarca el arco BC desde el centro de S . El siguiente diagrama muestra la situación:



En primer lugar se hallará $S(\alpha)$, la superficie del círculo S no tapada por L , y entonces se deducirá $\alpha(t)$ para obtener $S(t)$. Finalmente se dividirá $S(t)$ entre πr^2 para obtener la fracción de superficie $s(t)$. Observando el diagrama se deduce la siguiente igualdad:

$$S = \pi r^2 - 2s = \pi r^2 - 2(\sphericalangle OBC - \triangle OBC)$$

donde s es la superficie delimitada en rojo en el diagrama, y $\sphericalangle OBC$ y $\triangle OBC$ son el sector circular y el triángulo definido por dichos puntos respectivamente. Por lo tanto se obtiene:

$$S(\alpha) = \pi r^2 - 2 \left(\frac{r^2 \alpha}{2} - \frac{r^2 \sin \alpha}{2} \right) = r^2 (\pi + \sin \alpha - \alpha)$$

Considérese el triángulo rectángulo $\triangle OBP$. Aplicando la definición de coseno al ángulo $\frac{\alpha}{2}$

$$\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{OP}{OB} = \frac{r - \frac{x}{2}}{r} = 1 - \frac{x}{2r}$$

$$\alpha(x) = 2 \arccos \left(1 - \frac{x}{2r} \right)$$

Teniendo en cuenta que $x = vt$ y que $v = \frac{2r}{T}$, resulta:

$$\alpha(t) = 2 \arccos \left(1 - \frac{t}{T} \right)$$

Sustituyendo $\alpha(t)$ en la expresión de $S(\alpha)$ y dividiéndola entre la superficie máxima πr^2 se obtiene $s(t)$:

$$s(t) = 1 + \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{t}{T} \right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{t}{T} \right)^2} - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{t}{T} \right)$$

Puede comprobarse fácilmente que la fórmula obtenida es válida para $0 \leq t \leq T$, donde T es el tiempo necesario para que el disco lunar tape completamente al solar.

Código del programa para la obtención de $p(t)$

A continuación presento el código del programa que ha llevado a cabo la simulación expuesta en la sección IV. Autoría: Guillem Rivas.

```
A = RealProfile(:,3);
B = reshape(A,1781,[]);

B(B<900) = 0;
C = -B;
T = 1746;
X = zeros(1781,1745);

for n = 1:1745
    for p = 1:n
        t = p - n;
        X(:,p) = C(:,1746 - (n + 1 - p));
    end
    E = X + B;
    E(E < 0) = 0;
    S(1,n) = sum(sum(E));
    X = zeros(1781,1745);
end
```

AGRADECIMIENTOS

Para acabar, me gustaría agradecer a todas las personas e instituciones que me han permitido formar parte de La Ruta de las Estrellas en la expedición Shelios 2017, presenciando un eclipse total de Sol y participando en un proyecto científico acompañado de personas muy valiosas. Agradezco a Shelios y al IAC, y en especial a Miquel Serra-Ricart, por valorar mi trabajo tan positivamente y ofrecerme esta oportunidad. Agradezco también a CiMs-Cellex por su generosa financiación y su gran apoyo durante mi desarrollo académico, y a todos los participantes de la ruta Shelios 2017 por hacer de ella una experiencia tan increíble. También doy las gracias a la UCM por permitirme usar sus datos para realizar este trabajo. Finalmente agradezco a Guillem Rivas, que me ha ofrecido su ayuda desinteresada en el procesamiento de la imagen solar tomada por David Hernández.

REFERENCIAS

- [1] P. D. Hiscocks, "Measuring luminance with a digital camera," *Syscomp Electronic Design Limited*, pp. 7–11, 2014. [Online]. Available: <http://www.ee.ryerson.ca/~phiscock/astronomy/light-pollution/luminance-notes-2.pdf>
- [2] J. Soler, "Cálculo de errores y presentación de resultados experimentales," *Universidad Autónoma de Madrid*, 2010. [Online]. Available: https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/jsoler/docencia/lab_informaticos/2010/errores.pdf
- [3] J. J. Lunazzi, D. S. F. Magalhães, M. Amon, and N. Rivera, "Simple experiments demonstrating some properties of diffractive lens and spiral gratings," *Opt. Pura Apl.*, Vol. 41, pp. 2–4, 2008. [Online]. Available: <https://arxiv.org/pdf/0805.0818.pdf>